

自序

2012年7月國際數學教育委員會執委會ICMI有個不尋常的決定，委任我為ICMI STUDY 23主席，負責4年小學數學整數專題研究的討論文件和國際會議籌辦，並負責組織這個專題討論和書稿撰寫統籌 (<http://www.umac.mo/fed/ICMI23/index.html>)。2015年7月國際數學教育委員會執委會ICMI有個更不尋常的決定，四年一次的國際數學教育會議ICME-14由中國組織籌辦，這對世界數學教育者是熱門話題。ICMI STUDY 23和ICME-14兩個國際會議都使得中國數學教育理論和實踐一下子變為國際數學教育的焦點，受到了前所未有的矚目。

數學是所有學科基礎，因而毋庸置疑數學變為一門世界各地都統一需要學習的學科。目前在世界各地數學教學的指導理論，如雨後春筍，如建構主義、RMI現實數學、韋赫勒當前流行理論都是源於西方，指導力量似乎甚微，每年全世界在小學三年級有2.5億學生放棄數學學習 (<http://www.giz.de/expertise/html/11514.html>)。東方數學教學則極少有任何系統而清晰的理論，儘管國際比賽表現（如PISA, TIMSS）相對優異。本文希望彌補這一缺憾，嘗試解釋東方數學教學的背後的理性。

“雙基”對比“非雙基”。自古以來，東西方數學發展了兩個主要不同的方向，西方主要發展了幾何，東方主要發展了算術和代

數方向。對應的是，東西方數學教學也存在兩個不同的方向，西方強調直覺，主要發展了實驗、推理、演繹等依附於幾何教學的方向，東方主要發展了強調發展不變本質的“概念化、抽象化”的發展模式。相對西方而言，變式和不變的區分在中國教學更為重要（主要依附於中國語言強調其概念發展維度，也依附於算術和代數本身對抽象化要求）。“不變的關係”在內地通常被稱之為“雙基（不變）”教學，或者“變的關係”叫做變式教學。相對而言，內地教學一個突出的特徵就是討論什麼是不變的“雙基”，如何通過例題引出“雙基”，討論問題與問題之間的“不變的聯繫”，以及問題背後的不變的基本數學思想，是討論核心，教學圍繞“什麼變，什麼不變”的秘而不宣之教學習慣展開的。西方強調直覺，直覺和抽象如何連接，卻是西方教學的瓶頸。中國人在哲學“萬變不離其宗”指導下圍繞“什麼變，什麼不變”這個習慣是內地特有的，其他地方——例如港澳就缺乏，或者“不慣”！“不慣”反映了東方傳統的斷裂和缺失。筆者在澳大小學教學法課讓準教師討論“什麼變，什麼不變”，許多準教師便“不知為什麼做，需要做什麼”，“這是我們從來沒有做過的事情”，許多準教師覺得不可思議，明顯體現傳統的斷裂。相反，也有部分內地學生或者紅底學校學生卻非常認同，也“豁然開朗”——把握了不變的概念。很多數學外行描述數學是那麼難，每個題目都“不一樣”，無從下手，對於數學內行而言，每個題目都“一樣”。內地教師在長期發展一種變式實踐，其目的就是區分“一樣”和“不一樣”，為什麼是一樣的，如何變為“一樣”——抽象其一般的不變的本質，就是發展抽象數學的能力。

教學而言，變式是“一題多變”“多題一變”“一題多解”。中國最質樸的發展“不變的關係”教學實踐是中國內地數學教學所獨有的，對於內地教師而言，非常普遍，是個常識，無需一提，但是卻是中國數學教學的精華，內地以外，常常聽不懂。筆者在香港觀課經驗發現，老師不喜歡“變化（概念）的題目”——老師會說

“學生會暈掉的”，內地的信念則相反，是“越辯越明白”——沒有比較就沒有鑒別。由此可見，觀念差異非常巨大和衝突。變式被理解，被接納仍然是個艱巨任務。

在台北故宮第一次參觀青玉白菜，豬肉石頭，當鮮活的青玉白菜、豬肉石頭呈現的那一刻，我很感動。白菜——樸素的、尋常的，普通的，居然不僅高調地登到大雅之堂——成為台北故宮的藝術殿堂的鎮館之寶。大眾普及的白菜和豬肉食品是藝術原滋原味的“原型”，是藝術極品的源泉。追求質樸的道路——追求文化本真，可能是我心底做研究潛在的嚮往。反觀變式教學是中國最樸素的、尋常的、質樸的教學實踐，可能反映了中國數學教學尚未發現之本真。

筆者有三十多年在內地中小學聽課、教學和培訓教師的經驗，當我十幾年來輾轉來到香港和澳門進行中小學聽課和師資培訓，教材的混亂，其培訓難度之大，越來越感到回答“什麼是中國數學教學精髓”這個問題的迫切性！澳門和香港受西方傳統影響，兩者的反差，讓筆者不得不思考內地數學教育傳統背後的理論和邏輯。這些豐富直觀體驗，在一定意義上，是中國數學教育研究的最大優勢。

一般來說，中國內地孩子去其他國家留學，在數學方面，中國學生（普遍）表現得更優異，這點眾所周知。從小積累的“體驗庫”讓我一直思考可能中國的數學教學經驗有著合理的成分，近年的國際評價報告，內地數學教學都躋身世界前列。諷刺的是，幾十年來，中國數學教育工作者不太相信自己，最近十年的主要課改方向之一是模仿美國。本書希望，逆而行之，挖掘本土中國內地教學的傳統，解讀背後的教學邏輯，因這個邏輯不能套用西方任何教育理論，重新解讀東方文化下背景數學教學特有脈絡和理性，應該不是徒然無功。

英國數學心理家斯根普說：按照感覺人們可能認為鋼鐵會沉入水中，人們一旦掌握了阿基米德定律，可以超越感覺，可以用鋼鐵造船，航行於大海。理論幫助超越我們的感覺，做出更大貢獻。

“一題多變”、“多題一解”、“一題多解”——中國教師的教學術語。在問題組織層面，一般來說，“一題多變”、“多題一解”、“一題多解”是內地教師耳熟能詳，最自然、最熟悉的“教學語言”，而極少在內地以外聽到這些原滋原味的表達，可能是區別其他文化的根本教學技巧。而中國內地數學課程中，上述問題組佔課後的練習相當比重，是中國內地課程主要特徵之一，也是課後練習的主要合理要素之一，最為普遍的質樸的實踐。這種課後問題組之目的在於：使學生原有的、間斷的、瑣碎的活動經驗成為一個多角度的有機的整體，融會貫通“數學結構”網絡以外，還有助於學生，獲得多角度理解“數學結構”的數學思考方式，從而強化認知結構的深度和廣度。整體而言，內地教學比其他教學更注重關係連接和題目深層結構。“一題多變”、“多題一解”、“一題多解”之題目變化不僅決定了學生對題目表面特徵（水平變式）的識別，而且也決定了學生對題目深層結構特徵（垂直變式）的識別。通過問題變化加強了題目特徵的識別，從而在認知層面，促進認知的“回憶”功能到“思維”功能的發展，是中國內地教學主要邏輯。當思考這樣問題組結構，你也會突然很震驚，所有問題組結構怎麼都是圍繞數學關係的“小螺旋”？

重點、難點、關鍵點——中國教學的原則。在教學層面，內地教師的課堂教學一定使用重點、難點、關鍵——教學核心這個思想框架來設計。對比發現，其他文化卻從來未有像中國數學教學這樣重視核心。這個典型的強調，成為當今中國數學教育區別其他文化的根本數學教育特徵。為什麼在中國強調的是這個框架，不再以其他國家的框架呢？難道巧合？本書論述為什麼“變式”促進了“重點、難點、關鍵”突出。這包含中國人潛意識的教學的哲學信念之一脈相承，儘管這個一脈相承似乎是不自覺的。為什麼有這樣奇怪的現象呢？當思考這樣一個問題，你也會突然很震驚。所有教學結

構怎麼都是圍繞重點、難點、關鍵——教學核心展開的“中螺旋”結構？

“窄而深”對比“寬而淺”。在課程組織層面，美國課程常被描述為一英吋深和一英里寬。對照內地課程，“寬而淺”是其主要特徵，其主要問題不能拓展其深度與廣度，宏觀而言，課程缺少核心。最近，美國課程反復強調核心——2006年《州共同核心課程標準》，並認為是品質課程的關鍵，反思這個關鍵——中國人潛在堅持的信念存在著合理之處？中國大陸自建國六十年以來，數學教學的目標一直稱之為“雙基”教學，教學特徵稱之為“變式教學”（張奠宙，2005）。“雙基”指不變的根基，“變式教學”指變化策略，這些強調“不變”與“變化”似乎唯有中國的數學教學特別強調，其他文化卻從來未有像中國這樣重視。為什麼有這樣奇怪的現象呢？當思考這樣一個問題，你會突然很震驚。所有內地數學課程結構怎麼都按照少而精原則，圍繞單元核心展開的“大螺旋”結構？

為什麼？當我們追本溯源，研究《九章算術》，把二百四十六個問題，分為不變的九個類別，按照方田、粟米、均輸等內容，分為九章。而這種分類的思想——“以類合類”可能是數學教學設計的思想之源頭。分類意味著圍繞本類問題為核心，九章算術把問題分為方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、勾股九章。現代中國數學教學分為路程問題、工程問題、平均數問題各個類別，採取了分專題，分而治之的理念，這和西方數學教學的設計基本按照知識的框架去設計有很大不同（例如加法一章，減法一章，而中國數學教學的設計會合起來通常是加減問題為一章）。

“分類”的組織可以看為圍繞核心的教學思想，且極少得到數學教育工作者的注意！當中國受西方數學教學影響，數學知識框架下的現代教學基本模型：一題拓展為一類的思想。教學衍生了從“一道”問題到“一類”問題變式策略。而“變式”反映了釐清事物間的

“同異之處”，進而在“類同”的基礎上，進行“推類”的推理工具。從變分辨出不變，加以分類，即以“類”概念作為核心的“推類”推理，分析解剖個別事物，變“異類”為“同類”的恆等變換，進行歸納概括，是與西方哲學演繹推理對應的數學思維。從這個意義而言，“一題多變”在一定程度上顯示了近千年圍繞“核心”，循序漸進地拓展，進行數學教學的智慧沉澱。

這本書的文稿歷經十年斷斷續續的思考，我們使用水平變式描述表面特徵變化，垂直變式描述結構特徵變化，兩者複合直線型，因為這些變化都是圍繞不變的核心，故而形成（柱形）螺旋。水平與垂直變式主要從認知結構的角度描繪。因為聚焦的“柱形螺旋”成為向下的“錐形螺旋”是深度變式，而發散的“柱形螺旋”成為向上的錐形螺旋是廣度變式。深度與廣度變式主要從認知功能的角度描繪。而本書中“柱形螺旋”當聚焦某一個難點，變為“錐形螺旋”。此外，一般內地教材傳統上強調的“直線型”設計，強調一鼓作氣。而實質上也包含強調核心，圍繞核心的設計不是單純的直線式，而螺旋式結構，這些作為本書之基本定義。

近年隨著中國經濟的崛起，經濟發展的軟實力——中國教育也被特別關注，特別是數學教育——世界上唯一各地都學習的學科。當我們眼界放寬，會發現，螺旋變式是基於中國“類比”文化、中國易經哲學、價值觀的數學教學策略，是隱藏的“中國式”的教學邏輯。這個典型強調，成為當今中國數學教育區別其他文化的根本數學教育特徵。螺旋變式這一隱藏的中國式的數學教育策略，反映了中國數學教學的靈魂體，可能成為解決國際數學教育問題重要法寶。

過去三十多年，中國學生數學成績比其他地域的明顯好，中國數學教育傳統和優勢一直是國際研究熱點。中國數學教育的實踐實例很豐富，但是理論卻相對空白。然而，這一課題研究卻是非常挑戰，需要貫通東西文化，洞察古今。筆者有幸站在東西結合點——澳門、香港這一有利的觀景臺，圍繞這個研究，繼在2007年發表博士

論文《螺旋變式課程設計：理論與實踐》，前後發表相關論文20幾篇。在此基礎上，這本書的文稿歷經十年斷斷續續的思考，再取精華，濃縮寫就本書。這是“第一本”原創作品，它的主要價值是原創。這也是世界唯一的一本系統地從宏觀的課程、教學、到微觀的問題組織，全面地整理和發展中國數學教育理論的書籍。但是，因為不是一氣呵成，可能存在不統一，不一致問題。正如任何新生事物，因為不夠成熟，需要大量完善工作。這也是筆者的第一本書，算是我的處女作，希望一些原始的純樸思維能激發起讀者的共鳴。

借此機會特別感謝原香港中文大學黃毅英教授對我博士論文的指導，引導我對變式教學的關注。此外意大利的Prof. Maria Giuseppina (Mariolina) Bartolini Bussi 和我多年心照不宣，在我們多年互動，特別在主持 ICMI STUDY 23 討論過程，令我不斷反思，思想不斷提升和昇華為本書提供大量靈感。此外，本書在成稿的過程，原杭州師大碩士生何聲清、澳門大學李曉欣提供寶貴意見，讓這本書增色不少，特此一併鳴謝。此外，特別感謝我的家人謝文彪和謝敬一多年默默的支持，沒有這些有形和無形的支持，就不會有這本書誕生。

認識耶和華是智慧的開端，在本書構思和撰寫的過程，越來越認識到這一點，最後，感謝那位賜靈和愛的上帝！

孫旭花 謹示

2015年8月28日於澳門